数理解析研究所講究録
1077 巻 1999 年 13-21

Invariant subspaces and representations of certain von Neumann algebras

新潟大学自然科学　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
中国陝西師範大学　吉 国興 (Guoxing Ji)
新潟大学理学部　斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1. Introduction

ヒルベルト空間上の有界線形作用素が作る環を作用素環といい, 作用素の $*$-演算に関して閉じていない環を特に, 自己共役でない作用素環という. 自己共役でない作用素環の研究は, 1960 年の Kadison-Singer [2] による triangular 環の研究以後, reflexive 環, nest 環, subdiagonal 環等多くの概念が導入され, 不変部分空間の問題や正規でない作用素の構造等の研究とも関連して現在も盛んに行われ, 多くの結果が得られている. 自己共役でない作用素環の一つに接合積の部分環として解析的接合積の概念があり, subdiagonal 環等の重要な例を与えると共に, 分解定理や極大性の研究, その環に関する不変部分空間の構造など, 多くの研究がなされている (cf. [4–17]). 自己共役でない作用素環の研究において, その不変部分空間の構造理論は重要な役割を果たしているが, 我々は Lax-Phillips [3] に書かれている不変部分空間 (outgoing subspace) の表現定理が, ある von Neumann 環の解析的接合積への表現として考察されることに着目して, その理論を非可換版へ発展させることにより得られた幾つかの結果を報告する.

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし, $B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体とする. $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 v に対して, $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が outgoing であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

$$\text{(i) } v\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \qquad \text{(ii) } \bigcap_{k>0} v^k\mathfrak{M} = \{0\}, \qquad \text{(iii) } \overline{\bigcup_{k<0} v^k\mathfrak{M}} = \mathcal{H}$$

[3] では, ユニタリ作用素 v に対する outgoing subspace $\mathfrak{M}$ が存在するとき, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の $\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{K})$ ($\mathcal{K} = \mathfrak{M} \ominus v\mathfrak{M}$) への表現を与えているが, そのユニタリ作用素を W とおくと v によって生成される von Neumann 環とその σ-弱閉部分環 $\overline{\mathrm{Alg}\{v\}}^{\sigma-w}$ は次のように表現されることがわかる.

$$W\{v\}''W^* = \mathbb{C}I_{\mathcal{K}} \otimes L^\infty(\mathbb{T}), \qquad W\overline{\mathrm{Alg}\{v\}}^{\sigma-w}W^* = \mathbb{C}I_{\mathcal{K}} \otimes H^\infty(\mathbb{T})$$

我々はこのことに注意して, より一般的な設定で von Neumann 環の表現と, その不変部分空間の関係について考察する. すなわち, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環 M を, 条件 $vNv^* = N$ をみたす von Neumann 環 N とユニタリ作用素 v によって生成される von Neumann 環とし, N と v によって生成される M の σ-弱閉部分環を $\mathfrak{A}$ とする. このとき, $\mathfrak{A}$ に関して outgoing subspace として, $\mathcal{H}$ の pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace を考え, $\mathcal{H}$ の中に pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace が存在するとき, M および $\mathfrak{A}$ の表現定理についての結果を §2 で述べる.

§3 では, ユニタリ作用素 v の代わりに一係数ユニタリ群 $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で置き換えて, N と $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって生成された von Neumann 環 M_0 と, N と $\{u_t\}_{t\geqq 0}$ によって生成される σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ の表現を考察するとともに, 離散的な場合と連続的な場合の関係を考察する.

2. The discrete case

M をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の, 条件 $vNv^* = N$ をみたす von Neumann 環 N とユニタリ作用素 v により生成される von Neumann 環として, $\mathfrak{A}$ を M の N と v によって生成される σ-弱閉部分環とする. 我々は, outgoing subspace の概念として pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace を考え, それが存在するとき, M および $\mathfrak{A}$ の表現を考察する.

定義 2.1. $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする. このとき

(1) $\mathfrak{M}$ が *$\mathfrak{A}$-invariant* であるとは, $\mathfrak{A}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ が成り立つときをいう.

(2) $\mathfrak{M}$ が *reducing* であるとは, $M\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ をみたすときをいう.

(3) $\mathfrak{M}$ が *pure* であるとは, $\mathfrak{M}$ が自明でない *reducing subspace* を含まないときをいう.

(4) $\mathfrak{M}$ が *full* であるとは, $\mathfrak{M}$ を含む最小の *reducing subspace* が $\mathcal{H}$ であるときをいう.

実際には $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant であることと, 次の条件 (i) ~(iii) は同値であることがわかる.

$$\text{(i) } \mathfrak{A}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \qquad \text{(ii) } \bigcap_{k>0} v^k\mathfrak{M} = \{0\}, \qquad \text{(iii) } \overline{\bigcup_{k<0} v^k\mathfrak{M}} = \mathcal{H}.$$

従って, $N = \mathbb{C}I$ のとき, pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace であることは v に関して outgoing subspace になることと同値である.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace $\mathfrak{M}$ が存在すると仮定する. $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{M}$ における $v\mathfrak{M}$ の直交補空間, すなわち $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \ominus v\mathfrak{M}$ とおく. このとき作用素論でよく知られているように, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と, その閉部分空間 $\mathfrak{M}$ は次のように分解できる;

$$\mathcal{H} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oplus v^k\mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus v^k\mathfrak{F}.$$

いま $N\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ かつ $vNv^* = N$ より, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathfrak{F}$ は (v^nNv^{*n})-invariant であることが分かるので, 任意の $x \in N$ に対してヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathfrak{F})$ 上の作用素 $\pi(x)$ と両側シフト作用素 S を次の式により定めることが出来る.

$$\{\pi(x)\xi\}(n) \overset{\text{def}}{=} v^{-n}xv^n\xi(n) \qquad (\forall\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathfrak{F})\ \forall n \in \mathbb{Z})$$

$$(S\xi)(n) \overset{\text{def}}{=} \xi(n-1) \qquad (\forall\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathfrak{F}),\ \forall n \in \mathbb{Z}).$$

$\pi(N)=\{\pi(x)\mid x\in N\}$ とおく．このとき $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ を $\pi(N)$ と S によって生成される $\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})$ 上の von Neumann 環とし，$\pi(N)$ と S により生成される $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ の σ-弱閉部分環を $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{(+)}$ とする．

我々はまず次の定理を得た．

定理 2.2. $\mathcal{H}$ の *pure, full,* $\mathfrak{A}$*-invariant subspace* $\mathfrak{M}$ が存在するならば，M から $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ の上への *spatial* $*$*-isomorphism* が存在して，この写像により $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{(+)}$ へ移される．

証明. $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\ominus v\mathfrak{M}$ とおくと，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oplus v^n\mathfrak{F}$$

と分解できるので $\mathcal{H}$ の任意の元 ζ は次のように一意に分解される；

$$\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oplus v^n\zeta_n \qquad (\zeta_n\in\mathfrak{F},\ \forall n\in\mathbb{Z}).$$

よって

$$W\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

とおくと，W は明らかに $\mathcal{H}$ から $\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})$ へのユニタリ作用素になる．$\forall x\in N$ に対して，

$$\begin{aligned} WxW^*\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty} &= Wx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oplus v^n\zeta_n \\ &= W\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oplus v^n(v^{*n}xv^n)\zeta_n \\ &= \{v^{-n}xv^n\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \qquad (\forall\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})) \end{aligned}$$

が成立するので，

$$WxW^*=\pi(x)\quad(\forall x\in N).$$

また，同様の計算により

$$WvW^*=S$$

も成立するので，$WMW^*=\{\pi(N),S\}''=\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ となり M は $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ と spatially $*$-isomorphic になる．さらに，この同型写像により $\mathfrak{A}$ もまた $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{(+)}$ へ移される． ∎

いま，仮定より N と v は条件 $vNv^*=N$ をみたすので，$\forall x\in N$ に対して $\alpha(x)\stackrel{\text{def}}{=}vxv^*$ とおくと，α は N 上の自己同型写像になる．そこで，$\forall x\in N$ に対して，ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H})$ 上の作用素 $\pi_\alpha(x)$ および両側シフト作用素 $\widetilde{S}$ を次のように定義する．

$$\{\pi_\alpha(x)\xi\}(n)\stackrel{\text{def}}{=}\alpha^{-n}(x)\xi(n)\quad(\forall\xi\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H}),\ \forall n\in Z)$$

$$(\widetilde{S}\xi)(n)\stackrel{\text{def}}{=}\xi(n-1)\quad(\forall\xi\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H}),\ \forall n\in\mathbb{Z}).$$

このとき $\pi_\alpha(N)$ と $\widetilde{S}$ により生成される von Neumann 環を N とその $*$-自己同型群 $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ による**接合積**といい $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ とかく．また, $\pi_\alpha(N)$ と $\widetilde{S}$ により生成される $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の σ-弱閉部分環を N と α により決まる**解析的接合積**といい, $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ とかく．

命題 2.3. $\mathcal{H}$ の *pure, full,* $\mathfrak{A}$*-invariant subspace* $\mathfrak{M}$ が存在するとする．このとき, E を $\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H})$ から $\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})$ $(\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\ominus v\mathfrak{M})$ の上への射影作用素とすれば次が成り立つ．
(i) $E\in(N\rtimes_\alpha\mathbb{Z})'$.
(ii) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ (*resp.* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{(+)}$) は $N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ (*resp.* $N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}_+$) の $\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})$ への制限である．
(iii) $C(E)$ を E の $N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ における *central support* とすれば $C(E)=I$ である．従って, $\Phi(\mathfrak{A})=N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}_+$ をみたす M から $N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ の上への $*$*-isomorphism* Φ が存在する．

証明. $\forall x\in N$ に対して,

$$\begin{aligned}\{\pi_\alpha(x)\xi\}(n) &= \alpha^{-n}(x)\xi(n)\\ &= v^{-n}xv^n\xi(n)\\ &= \{\pi(x)\xi\}(n) \qquad (\forall\xi\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F}),\ \forall n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

が成り立ち, 更に

$$\begin{aligned}(\widetilde{S}\xi)(n) &= \xi(n-1)\\ &= (S\xi)(n) \qquad (\forall\xi\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F}),\ \forall n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

であるので, $\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})$ は $(N\rtimes_\alpha\mathbb{Z})$-invariant であるので $E\in(N\rtimes_\alpha\mathbb{Z})'$ である．よって, これより $\pi_\alpha(x)|_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})}=\pi(x)$ かつ $\widetilde{S}|_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})}=S$ であるから, $(N\rtimes_\alpha\mathbb{Z})|_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})}=\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ と $(N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}_+)|_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathfrak{F})}=\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{(+)}$ が示される．

次に $\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H})$ 上のユニタリ作用素 U を次のように定義する．

$$(U\xi)(n)\overset{\text{def}}{=}v\xi(n+1) \qquad (\forall\xi\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H}),\forall\, n\in\mathbb{Z}).$$

このとき, $\forall x\in N$ に対して,

$$\begin{aligned}(U\pi_\alpha(x)\xi)(n) =& v(\pi_\alpha(x)\xi)(n+1)\\ =& v\alpha^{-(n+1)}(x)\xi(n+1)\\ =& \alpha^{-n}(x)v\xi(n+1)\\ =& \alpha^{-n}(x)(U\xi)(n)\\ =& (\pi_\alpha(x)U\xi)(n) \qquad (\forall\xi\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H}),\ \forall n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

となり, $U\pi_\alpha(x)=\pi_\alpha(x)U$ をみたす．同様に $US=SU$ が成り立つことも示されるので, $U\in(N\rtimes_\alpha\mathbb{Z})'$ を得る．いま P を $P\geqq E$ をみたす $N\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ の central projection とすれば, $P\geqq U^kEU^{*k}$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$ が成り立つ．U^kEU^{*k} は $\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H})$ から $\ell^2(\mathbb{Z},v^k\mathfrak{F})$

の上への射影作用素であり, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(U^kEU^{*k}) = I$ をみたすので, $C(E) = I$ が示される. ∎

命題 2.3 の (iii) から, もし $\mathcal{H}$ の pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace $\mathfrak{M}$ が存在するならば, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ は接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ と $*$-isomorphic であることが分かる. しかし, 必ずしも $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ は接合積と spatially $*$-isomorphic ではないことが, 次の例によって示される.

例 2.4. $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ として, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の canonical ONB とする. すなわち,

$$e_n = \{\cdots, 0, \overset{\overset{n}{\vee}}{1}, 0, \cdots\} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

とおく. N を $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関して対角作用素全体からなる von Neumann 環として, v を両側シフト作用素とする. このとき, 明らかに v と N は条件 $vNv^* = N$ をみたし, N と v によって生成される von Neumann 環 M は $B(\mathcal{H})$ になる.

一方, $\mathfrak{A}$ を N と v により生成される M の σ-弱閉部分環とすれば, $\mathfrak{M} = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ は $\mathcal{H}$ の pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace になる. しかしながら, $B(\mathcal{H})$ はどんな接合積とも spatially $*$-isomorphic にはならないので, 定理 2.2 から $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ は接合積と spatially $*$-isomorphic でないことが示される.

$N = \mathbb{C}I$ で, $\mathcal{H}$ の pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace $\mathfrak{M}$ が存在するとするならば, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ の定義より, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ は $\mathbb{C}I|_{\mathfrak{F}}$ の自明な $*$-自己同型写像 $\alpha = \mathrm{ad}v$ による接合積であり, M は接合積 $\mathbb{C}I|_{\mathfrak{F}} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ と spatially $*$-isomorphic である. この一般化として, 我々は次の結果を得る.

系 2.5. 定理 2.2 の条件のもとで, もし N が *factor* であるならば, ある *von Neumann* 環 $\tilde{N}$ と $\tilde{N}$ 上の $*$-自己同型写像 $\tilde{\alpha}$ が存在して, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ は $\tilde{N}$ と $\tilde{N}$ 上の $*$-自己同型群 $\{\tilde{\alpha}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ による接合積になる. さらに, この同一視により $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{(+)}$ は解析的接合積 $\tilde{N} \rtimes_{\tilde{\alpha}} \mathbb{Z}_+$ になる.

3. The continuous case

この節では N をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環として, $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{H}$ 上の一係数ユニタリ群とする. N と $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって生成される $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環を M_0 をして, $\mathfrak{B}$ を N と $\{u_t\}_{t\geq 0}$ によって生成される M_0 の σ-弱閉部分環とする. このとき §2 と同様に pure, full, $\mathfrak{B}$-invariant subspace を次のように定義する.

定義 3.1. $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする. このとき

(1) $\mathfrak{M}$ が *$\mathfrak{B}$-invariant* であるとは, $\mathfrak{B}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ をみたすときをいう.
(2) $\mathfrak{M}$ が *reducing* であるとは, $M_0\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ をみたすときをいう.
(3) $\mathfrak{M}$ が *pure* であるとは, $\mathfrak{M}$ が自明でない *reducing subspace* を含まないときをいう.
(4) $\mathfrak{M}$ が *full* であるとは, $\mathfrak{M}$ を含む最小の *reducing subspace* が $\mathcal{H}$ であるときをいう.

このとき $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が pure, full, $\mathfrak{B}$-invariant であることと, 次の条件 (i)〜(iii) をみたすことは同値である.

$$\text{(i)}\mathfrak{B}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \qquad \text{(ii)} \bigcap_{t>0} u_t\mathfrak{M} = \{0\}, \qquad \text{(iii)}\overline{\bigcup_{t<0} u_t\mathfrak{M}} = \mathcal{H}.$$

いま, A を $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ による無限小生成作用素とする. すなわち,

$$A\xi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{u_t\xi - \xi}{t} \qquad \left(\forall\xi \in D(A) = \left\{\xi \in \mathcal{H} \mid \exists \lim_{t\to 0+} \frac{u_t\xi - \xi}{t}\right\}\right).$$

このとき,

$$v \stackrel{\text{def}}{=} (I+A)(I-A)^{-1}$$

とおくと, v は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素になる. そこで, §2 と同様にこのユニタリ作用素 v と von Neumann 環 N によって生成される von Neumann 環を M, v と N によって生成されるその σ-弱閉部分環を $\mathfrak{A}$ とする. このとき $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の invariant subspace の構造に関して, 次の基本的な関係が得られる.

命題 3.2. $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする. このとき $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{A}$-*invariant* であることと $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{B}$-*invariant* であることは同値である.

証明. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ とおくと

$$v = (I+A)(I-A)^{-1} = 2R(1,A) - I \quad \cdots\cdots(*)$$

より v は

$$v\xi = 2\int_0^\infty e^{-t}u_t\xi\,dt - \xi, \quad (\forall\xi \in \mathcal{H})$$

と表すことができる. よって $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{B}$-invariant のときは明らかに $\mathfrak{A}$-invariant である.

次に $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{A}$-invariant であると仮定する. このとき $\forall\lambda_0 > 0$ に対して $\|R(\lambda_0, A)\| \leqq 1$ が成り立つので, $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$ を満たす $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R(\lambda_0, A)]^{n+1}$$

が成り立つ. これより $\mathfrak{M}$ が $R(\lambda_0, A)$-invariant であれば, $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$ を満たす $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathfrak{M}$ はまた $R(\lambda, A)$-invariant でもある. よって, $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}$-invariant より $(*)$ から $R(1, A)$-invariant であるので $R(\frac{3}{2}, A)$-invariant となる. この操作を繰り返すことにより $\forall\lambda > 0$ に対して,

$$R(\lambda, A)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

が成立する. よって $\forall\xi \in \mathfrak{M}$, $\forall\eta \in \mathfrak{M}^\perp$ に対して,

$$0 = \langle R(\lambda, A)\xi, \eta\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle u_t\xi, \eta\rangle dt \quad (\forall\lambda > 0)$$

となり Laplace 変換の一意性の定理より $\langle u_t\xi, \eta\rangle = 0 \quad (\forall\lambda > 0)$ をえる. よって $\forall t > 0$ に対して $u_t\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ となり $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{B}$-invariant であることが示される. ∎

命題 3.2 より, M と M_0, および $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の関係を得る.

命題 3.3.
(i) $\mathcal{H}$ の閉部分空間が *pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant* であることと *pure, full, $\mathfrak{B}$-invariant* であることは同値である.
(ii) M と M_0 は一致する.
(iii) M_0 が *separating vector* を持つならば, $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は一致する.

証明. (i)(ii) は命題 3.2 より明らかであるので, ここでは (iii) だけを証明する. そのために幾つかの記号を定義する. $\mathfrak{C}$ を M_0 の部分環として, $\mathfrak{L}$ を $B(\mathcal{H})$ の射影作用素からなる閉束とする. このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Lat}\mathfrak{C} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{P \in B(\mathcal{H})_p \mid (I-P)TP = 0,\ \forall T \in \mathfrak{C}\}\\ &= \{P \in B(\mathcal{H})_p \mid T(P\mathcal{H}) \subseteqq (P\mathcal{H}),\ \forall T \in \mathfrak{C}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Alg}\mathfrak{L} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{T \in B(\mathcal{H}) \mid (I-P)TP = 0,\ \forall P \in \mathfrak{L}\}\\ &= \{T \in B(\mathcal{H}) \mid T(P\mathcal{H}) \subseteqq (P\mathcal{H}),\ \forall P \in \mathfrak{L}\}\end{aligned}$$

とする. (ここで $B(\mathcal{H})_p$ は $B(\mathcal{H})$ の射影作用素全体とする.) このとき命題 3.2 より $\mathrm{Lat}\mathfrak{A} = \mathrm{Lat}\mathfrak{B}$ であるので

$$\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{B} \subseteqq \mathrm{AlgLat}\mathfrak{B} \subseteqq \mathrm{AlgLat}\mathfrak{A}$$

が成立する. よって $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ を示すには $\mathfrak{A} = \mathrm{AlgLat}\mathfrak{A}$ を示せばよい. 仮に, $\mathfrak{A} \subsetneqq \mathrm{AlgLat}\mathfrak{A}$ とすれば, $\mathfrak{A}$ の元でない $\mathrm{AlgLat}\mathfrak{A}$ の元 $x \neq 0$ が存在するので M_* の元 ϕ で $\phi(x) = 1$ かつ $\phi|_{\mathfrak{A}} = 0$ を満たすものが存在する. M は separating vector を持つので,

$$\phi(y) = \langle y\xi, \eta\rangle \quad (\forall y \in M)$$

をみたす $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ $(\xi \neq 0, \eta \neq 0)$ が存在する. 従って, $\forall y \in \mathfrak{A}$ に対して,

$$\langle y\xi, \eta\rangle = \phi(y) = 0$$

であるから $[\mathfrak{A}\xi] \perp \eta$ を得る. (ここで $[\mathfrak{A}\xi]$ は $\mathcal{H}$ における $\mathfrak{A}\xi$ の closed linear span とする.) また, $[\mathfrak{A}\xi] \in \mathrm{Lat}\mathfrak{A}$ かつ $x \in \mathrm{AlgLat}\mathfrak{A}$ より, $x\xi \in [\mathfrak{A}\xi]$ である. 従って,

$$\phi(x) = \langle x\xi, \eta\rangle = 0.$$

これは $\phi(x) = 1$ に矛盾する. よって $\mathfrak{A} = \mathrm{AlgLat}\mathfrak{A}$ となり, 命題が示される. ∎

次に §2 と同様に, M_0 及び $\mathfrak{B}$ の接合積への表現を考察する. まず, u_t と N が条件 $u_t N u_t{}^* = N$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ を満たすと仮定する. このとき, $\forall x \in N$ に対して,

$\beta_t(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u_t x u_t^*$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ と定義すると, $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は N 上の σ-弱連続な $*$-自己同型群になる. このとき, N と N 上の $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ による接合積 $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ は

$$\{\pi_\beta(x)\xi\}(t) = \beta_{-t}(x)\xi(t) \quad (\forall\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}),\ \forall t \in \mathbb{R})$$
$$\{\lambda(t)\xi\}(s) = \xi(s-t) \quad (\forall\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}),\ \forall s, t \in \mathbb{R}).$$

によって定義される $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ 上の作用素 $\pi_\beta(x)$ $(\forall x \in N)$ と $\lambda(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ から生成される von Neumann 環である. また, N と $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ による解析的接合積 $N \rtimes_\beta \mathbb{R}_+$ は $\pi_\beta(N)$ と $\{\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ によって生成される $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環である.

命題 3.4. もし $\mathcal{H}$ の *pure, full,* $\mathfrak{B}$*-invariant subspace* $\mathfrak{M}$ が存在するならば, M_0 から $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ への $*$*-isomorphism* Φ で条件 $\Phi(\mathfrak{B}) = N \rtimes_\beta \mathbb{R}_+$ をみたすものが存在する.

命題 3.3 の (i) より $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{H}$ の pure, full, $\mathfrak{B}$-invariant subspace であることと $\mathfrak{M}$ が pure, full, $\mathfrak{A}$-invariant subspace であることは同値であった. よって命題 2.3 より, N と v が条件 $vNv^* = N$ をみたすならば, M_0 は離散接合積と $*$-isomorphic になるので, 離散接合積と連続接合積の $*$-isomorphism が存在する. そこで, いつ N と v が条件 $vNv^* = N$ をみたすかを考察する.

いま, ユニタリ作用素 v は

$$v\xi = 2\int_0^\infty e^{-t} u_t \xi\, dt - \xi \qquad \forall\xi \in \mathcal{H}$$

と表されるので, すべての t に対して u_t が N の可換子環 N' の元であるならば, $v \in N'$ より条件 $vNv^* = N$ をみたす. しかしながら次の例から, 必ずしもこの条件は成立しないことが示される.

例 3.5. N をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環として, $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を, ある t_0 に対して β_{t_0} が outer になる N 上の $*$-自己同型群とする. 連続接合積 $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ は $\pi_\beta(N)$ と $\{\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって生成される von Neumann 環であるから, $\forall x \in N$ と $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して, $\pi_\beta(\beta_t(x)) = \lambda(t)\pi_\beta(x)\lambda(t)^*$ を得る. よって,

$$\pi_\beta(N) = \lambda(t)\pi_\beta(N)\lambda(t)^* \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

が成立する. また, $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ は pure, full, $(N \rtimes_\beta \mathbb{R}_+)$-invariant subspace であるから, $\{\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して, ユニタリ作用素 v を

$$v\xi = 2\int_0^\infty e^{-t}\lambda(t)\xi dt - \xi \qquad (\forall\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})).$$

により与えれば, 命題 3.3 より $\pi_\beta(N)$ と v によって生成される von Neumann 環は $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ を一致する. よって, $\pi_\beta(N)$ と v により生成される σ-弱閉部分環は $N \rtimes_\beta \mathbb{R}_+$ に一致する. 命題 2.3 より, もし $\pi_\beta(N)$ と v が条件 $v\pi_\beta(N)v^* = \pi_\beta(N)$ をみたすなら

ば, N 上のある $*$-自己同型写像 α と $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ から $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の上への $*$-同型写像 Φ で, 条件 $\Phi(N \rtimes_\beta \mathbb{R}_+) = N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ をみたすものが存在する. $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ から $\pi_\alpha(N)$ の上への faithful normal canonical conditional expectation はいつでも存在するので, $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ から $\pi_\beta(N)$ への faithful normal conditional expectation も存在することになる. しかし, [1, Theorem 3.5] より, ある t_0 に対して β_{t_0} が outer であるから, $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ から $\pi_\beta(N)$ の上への normal conditional expectation は存在しないことが知られているので矛盾となり, $\pi_\beta(N)$ と v は条件 $v\pi_\beta(N)v^* = \pi_\beta(N)$ を満たさないことが示される.

最後に, 離散接合積と連続接合積に関する次の関係がある.

定理 3.6. 次の条件は同値である.
(i) N 上のある $*$-自己同型写像 α と $N \rtimes_\beta \mathbb{R}$ から $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の上への $*$-同型写像 Φ で条件 $\Phi(N \rtimes_\beta \mathbb{R}_+) = N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ を満たすものが存在する.
(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ 対して β_t は N 上の *inner* $*$-自己同型写像である.

References

1. Y. Katayama, *Non-existence of a normal conditional expectation in a continuous crossed product*, Kodai Math. J., **4** (1981), 345–352.
2. R. Kadison and I. M. Singer, *Triangular operator algebras*, Amer. J. Math., **82** (1960), 227–259.
3. P. Lax and R. Phillips, *Scattering Theory, 2nd ed.*, Academic press, New York, 1989.
4. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products* (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., **248** (1979), 381–409.
5. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products II*, J. Math. Soc. Japan, **33** (1981), 485–495.
6. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products III*, J. Operator Theory, **12** (1984), 3–22.
7. M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Equivalence classes of invariant subspaces in non-selfadjoint crossed products*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **20** (1984), 1119–1138.
8. P. S. Muhly and K-S. Saito, *Analytic crossed products and outer conjugacy classes of automorphisms of von Neumann algebras*, Math. Scand., **58** (1986), 55–68.
9. P. S. Muhly and K-S. Saito, *Analytic crossed products and outer conjugacy classes of automorphisms of von Neumann algebras II*, Math. Ann., **279** (1987), 1–7.
10. P. S. Muhly and B. Solel, *A lifting theorem for analytic crossed products*, Houston J. Math., **18** (1992), 153–166.
11. K-S. Saito, *Invariant subspaces and cocycles in nonselfadjoint crossed products*, J. Funct. Anal., **45** (1982), 177–193.
12. K-S. Saito, *Automorphisms and nonselfadjoint crossed products*, Pacific J. Math., **102** (1982), 179–187.
13. K-S. Saito, *Toeplitz operators associated with analytic crossed products*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **108** (1990), 539–549.
14. K-S. Saito, *Toeplitz operators associated with analytic crossed products II. Invariant subspaces and factorization*, Integral Equations and Operator Theory, **14** (1991), 251–275.
15. K-S. Saito, *A simple approach to the invariant subspace structure of analytic crossed products*, J. Operator Theory, **27** (1992), 169–177.
16. B. Solel, *The invariant subspace structure of nonselfadjoint crossed products*, Trans. Amer. Math. Soc., **277** (1983), 263–273.
17. B. Solel, *Nonselfadjoint crossed products; invariant subspaces, cocycles and subalgebras*, Indiana Univ. Math. J., **34** (1985), 277–298.